# Thüringer Kultusministerium

# Abiturprüfung 1995

## Mathematik

als Grundfach
(Haupttermin)

**Hinweise für die Prüfungsteilnehmerinnen und Prüfungsteilnehmer**

| | |
|---|---|
| Arbeitszeit: | 180 Minuten |
| Einlesezeit: | 30 Minuten |
| Hilfsmittel: | Taschenrechner (nicht programmierbar, nicht graphikfähig)<br>Tafelwerk |

Der Prüfungsteilnehmer wählt von den Aufgaben 1.1 und 1.2 eine und von den Aufgaben 2.1 und 2.2 und 2.3 zwei zur Bearbeitung aus.

Neben jeder Teilaufgabe steht die für diese Teilaufgabe maximal erreichbare Anzahl von Bewertungseinheiten (BE).

**Aufgabe 1.1**

Gegeben ist die Funktion f durch

$$f(x) = x + 3 + \frac{4}{x} \qquad (x \in \mathrm{R};\ x \neq 0).$$

a) Untersuchen Sie die Funktion f auf Polstellen und den Graphen von f auf Schnittpunkte mit der x-Achse, lokale Extrempunkte und Wendepunkte!
Weisen Sie die Art der lokalen Extrema nach!

8 BE

b) Die Gerade g mit der Gleichung $y = x + 3$ ist eine Asymptote des Graphen der Funktion f.
Zeichnen Sie diese Asymptote und den Graphen der Funktion f im Intervall $-6 \leq x \leq 6$ in ein und dasselbe Koordinatensystem!
Die Koordinatenachsen, die Gerade g und die Gerade mit der Gleichung $x = 2$ begrenzen ein Trapez. Bei Rotation dieser Trapezfläche um die x-Achse entsteht ein Kegelstumpf.
Berechnen Sie das Volumen des Kegelstumpfes!

4 BE

c) Ermitteln Sie die Gleichung der Geraden h, die den Graphen von f im 1.Quadranten berührt und die auf der Geraden g (aus Teilaufgabe b) senkrecht steht! In welchem Punkt $P(u; f(u))$ des Graphen von f muß man die Tangente an den Graphen legen, so daß diese Tangente durch den Koordinatenursprung geht?

6 BE

d) Der Graph von f, die Gerade g sowie die Geraden $x = e$ (e bezeichnet die Eulersche Zahl) und $x = c$ $(c \in \mathrm{R};\ c > e)$ begrenzen eine Fläche.
Berechnen Sie den Inhalt A dieser Fläche in Abhängigkeit von c!
Berechnen Sie c für den Fall, daß der Inhalt der Fläche 2 Flächeneinheiten beträgt!

4 BE

e) Der Graph einer quadratischen Funktion q geht durch den Punkt Q(0;3) und hat im Punkt R(4;5) einen lokalen Maximumpunkt.
Ermitteln Sie die Gleichung der quadratischen Funktion q!
Für welches x mit x > 0 wird die Differenz d(x) = f(x) - q(x) minimal?
Berechnen Sie die minimale Differenz!

8 BE

**Aufgabe 1.2**

Gegeben ist die Funktion f durch

$f(x)=\frac{1}{2}e^{x}\left(x^{2}-4x+4\right)$ ($x \in$ R).

a) Berechnen Sie die Nullstelle der Funktion f und die lokalen Extrempunkte des Graphen von f!
Weisen Sie die Art der lokalen Extrema nach!

8 BE

b) Weisen Sie nach, daß der Graph von f zwei Wendepunkte hat!
Berechnen Sie die Koordinaten dieser Wendepunkte!

4 BE

c) Zeigen Sie, daß die Tangenten, die an den Graphen von f in den Wendepunkten gelegt werden, aufeinander senkrecht stehen!

3 BE

d) Berechnen Sie f(3) und f(-3)! Skizzieren Sie den Graphen von f im Intervall $-3 \leq x \leq 3$ !

2 BE

e) Weisen Sie nach, daß die Funktion F mit $F(x)=\frac{1}{2}e^{x}\left(x^{2}-6x+10\right)$ eine Stammfunktion von f ist!

1 BE

f) Berechnen Sie den Inhalt der Fläche, die im 1. Quadranten vom Graphen der Funktion f und den Koordinatenachsen vollständig begrenzt wird!

2 BE

g) Beweisen Sie: Für alle $x \in$ R, $x \neq 2$ ist der Quotient $\frac{F(x)-f''(x)}{f(x)-f'(x)}$ konstant!
Bestimmen Sie den Wert dieser Konstanten!

3 BE

h) Der Koordinatenursprung O, der Punkt $P(x_p; f(x_p))$ mit $x_p \in R$, $0 < x_p < 2$ und der Punkt $Q(x_p;0)$ bilden ein Dreieck $\Delta$ OPQ.
Berechnen Sie die Koordinaten des Punktes P so, daß der Flächeninhalt A des Dreiecks $\Delta$ OPQ maximal wird!
Zeigen Sie dazu, daß $A'(x_p) = \frac{1}{4} e^{x_p} (x_p - 1)(x_p - 2)(x_p + 2)$ gilt!

7 BE

**Aufgabe 2.1**

In einem kartesischen Koordinatensystem sind die Punkte $A(0;2;0)$, $B(-3;2;3)$ und $C(-3;5;0)$ gegeben.

a) Bestimmen Sie die Seitenlängen und die Innenwinkel des Dreiecks $\Delta ABC$!

3 BE

b) Geben Sie eine Gleichung der Ebene $\varepsilon$ an, in der das Dreieck $\Delta ABC$ liegt!

1 BE

c) Die Gerade g mit dem Richtungsvektor $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ enthält den Punkt $E(1;5;5)$ und schneidet die Ebene $\varepsilon$ (aus Teilaufgabe b) in einem Punkt D.
Geben Sie die Koordinaten des Punktes D an!
Weisen Sie nach, daß die Strecke $\overline{ED}$ senkrecht auf der Ebene $\varepsilon$ steht!

5 BE

d) Das Dreieck $\Delta ABC$ sei die Grundfläche einer dreiseitigen Pyramide mit der Spitze E (aus Teilaufgabe c).
Berechnen Sie das Volumen der Pyramide ABCE!

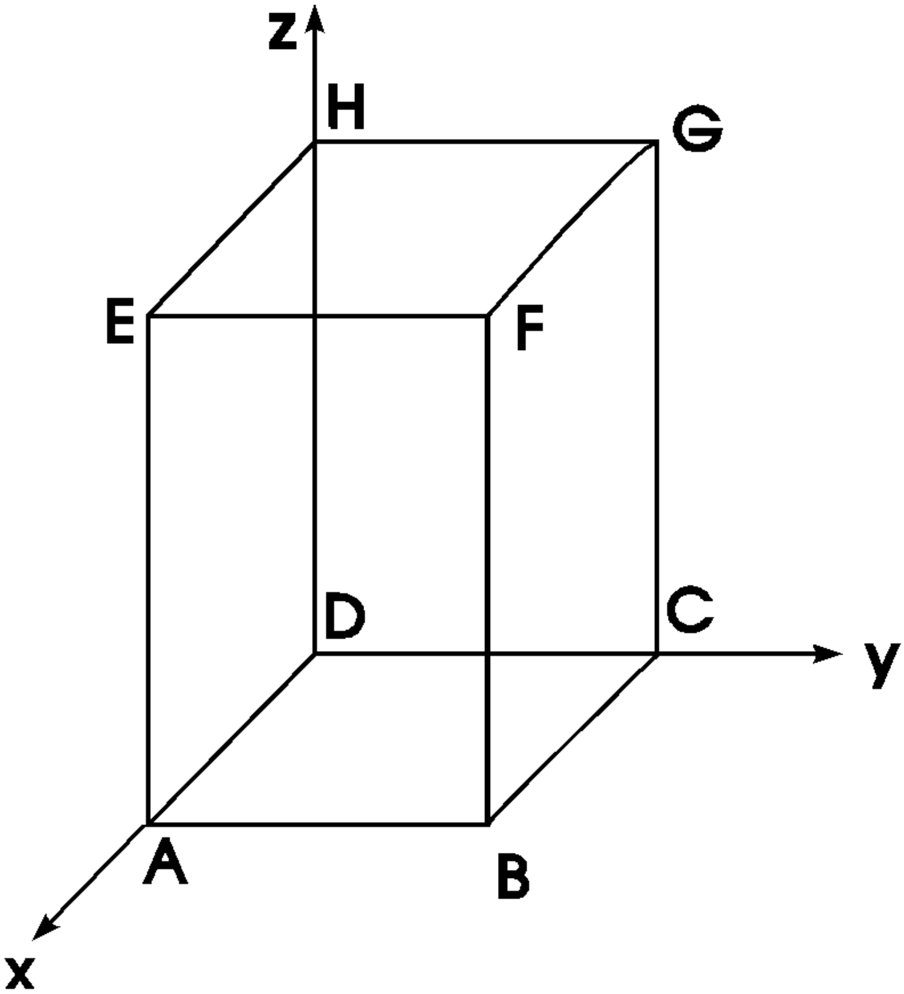
3 BE

e) Auf der Geraden g (aus Teilaufgabe c) existieren zwei Punkte $F_1$ und $F_2$ so, daß das Volumen der Pyramiden $ABCF_1$ und $ABCF_2$ jeweils halb so groß ist wie das Volumen der Pyramide ABCE.
Geben Sie die Koordinaten der Punkte $F_1$ und $F_2$ an!

3 BE

**Aufgabe 2.2**

Von den Eckpunkten eines Quaders ABCDEFGH sind die Punkte $A(4;0;0)$, $C(0;6;0)$ und $H(0;0;8)$ in einem kartesischen Koordinatensystem mit dem Ursprung D gegeben (siehe Skizze).




a) Bestimmen Sie die Koordinaten der übrigen Eckpunkte des Quaders!

1 BE

b) Auf der Kante $\overline{\mathrm{BF}}$ liegt ein Punkt $K(x_o;y_o;z_o)$ so, daß gilt: $\left|\overrightarrow{\mathrm{AK}}\right| = \left|\overrightarrow{\mathrm{HK}}\right|$.

Berechnen Sie die Koordinaten des Punktes K und den Winkel $\sphericalangle$ AKH !

4 BE

c) Geben Sie eine Gleichung für die Ebene $\varepsilon$ an, die die Punkte E, B und G enthält!
In welchem Punkt schneidet $\varepsilon$ die z-Achse?

3 BE

d) Die Gerade, die durch die Punkte D und F verläuft, durchstößt $\varepsilon$ (aus Teilaufgabe c) im Punkt S.
Berechnen Sie die Koordinaten von S!

3 BE

e) Die Punkte B, E und C bilden mit einem Punkt T ein ebenes Viereck.
Wie viele Möglichkeiten gibt es für die Lage von T, damit das Viereck ein Parallelogramm ist?
Ermitteln Sie jeweils die Koordinaten von T!

4 BE

**Aufgabe 2.3**

Die Schüler Anita, Bernd und Christel bereiten für ihre Klassenfete verschiedene Glücksspiele vor.

a) Anita will ein Spiel mit einer idealen Münze anbieten, deren eine Seite Zahl und deren andere Seite Wappen trägt. Die Münze soll dreimal geworfen werden.
Betrachtet werden die folgenden Ereignisse:
A: =" es wird genau zweimal Wappen geworfen",
B: ="es wird nicht dreimal Zahl geworfen",
$C := \overline{A \cup B}$,
$D := A \cap \overline{B}$.
Wählen Sie eine Ergebnismenge, die für alle diese Ereignisse geeignet ist!
Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten der Ereignisse A, B, C und
D! 5 BE

b) Bernd bereitet ein Spiel mit einer "gezinkten " Münze vor, bei der das Wappen mit der Wahrscheinlichkeit $\frac{3}{5}$ fällt. Nach Einzahlen von 1 DM an den Spielleiter darf der Spieler diese Münze genau dreimal werfen.
Für jedes Eintreten von "Zahl" erhält der Spieler vom Spielleiter einen bestimmten Betrag a. Fällt das Wappen, zahlt der Spielleiter jeweils nichts aus.
Ermitteln Sie, bei welchem Auszahlungsbetrag a dieses Spiel fair ist! 4 BE

c) Christel hat sich ein Spiel mit einer Urne ausgedacht, in der sich genau 12 Kugeln und zwar eine grüne und 11 weiße befinden. Der Spieler zieht n-mal (auf gut Glück) je eine Kugel mit Zurücklegen.
Wie groß muß n mindestens gewählt werden, damit die Wahrscheinlichkeit dafür, daß keine grüne Kugel gezogen wird, höchstens 0,01 beträgt? 3 BE

Lehrer Denke kündigt für die nächste Leistungskontrolle an, daß er 10 Fragen stellen und jeweils 4 Antworten bei jeder Frage vorgeben wird. Von diesen Antworten ist jeweils genau eine richtig.

d) Schüler Lässig will "auf gut Glück" je eine Antwort ankreuzen.
Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, daß er bei seiner Strategie höchstens zwei Fragen falsch beantwortet? 3 BE